독립심화학습 12주차

2017103580 사회학과 김정운

저번에는 변분법과 최적제어이론을 비교하면서 후자가 가진 한계들을 살펴보았다. 하지만 최적제어이론은 다른 최적화 방법과 달리, 시간에 의존하는 state에 대해 사용할 수 있다는 장점을 가진다. 또한 state x를 직접 조절하지 않고 control u를 통해 간접적으로 조절한다는 점에서, 현실의 많은 문제를 해결할 수 있는 실마리를 얻을 수 있다. 다만 기존 최적화이론들을 일반화했기 때문에, optimal control theory과 관련된 정리들은 상대적으로 빈약하다.

그래서 이를 해결하기 위해 최적제어문제를 다른 방식으로 풀고자 하는데, 그 중 하나는 state와 control을 하나로 묶어서 새로운 변수로 만드는 것이 있다. 그러면 해당 변수에 대해 변분법 문제로 기존 문제를 변환할 수 있다. 그래서 이번 주차부터는 변분법과 관련된 정리들을 살펴보고자 하는데, 해당 정리들을 통해 기존 최적제어문제를 보다 쉽게 풀 수 있는 가능성이 있기 때문이다.

우선 다음과 같은 함수를 최소화하는 state를 x\*라고 하자. Min subject to . 이때 x와 가 [a,b]서 C2-continuous function이면, x를 admissible이라고 하겠다. 그러면 x\*의 neighborhood에 있는 다른 state x에 대해 가 성립해야 한다. 그러면 x를 x\*+a\*y라고 할 수 있는데, 그러면 J(x)=J(x\*+a\*y)=가 되는데, 이를 g(a)라고 하자. 그러면 a에 대해 g를 미분하면 g’(a)= 이 된다. x\*에서 J가 최소이기 때문에 J’(x\*)=0이 되며, 이는 g’(0)=과 동치다. 따라서 부분적분과 결합하면 g’(0)==0이 성립해야 한다. 이때 y(t)는 arbitary해야만 x(t)가 임의의 state가 된다. 따라서 x\*가 optimal state이면, 이 성립해야 한다. 이때 방정식을 Euler equation이라고 부른다.

오일러 방정식을 유도하는 과정에서 적분함수를 a에 대해 미분했을 때, 그 미분을 피적분함수에 적용한 후에 적분을 수행한 것과 같다는 것을 이용했다. 이는 가 [a,b]에서 C2 연속함수이기 때문에 가능한데, [a,b]에서 C2연속이라는 것은 도함수가 [a,b]에서 유계라는 것을 의미하고 이로 인해 푸비니 정리를 사용할 수 있다. 이로 인해 오일러 방정식이 도출될 수 있었는데, 이는 차후 state x가 C2 continuous on [a,b]보다 일반화된 함수여도 최적해가 오일러-방정식을 만족한다는 것을 증명하는데 사용될 수 있다(즉, 푸비니 정리가 성립한다는 것을 보여주기만 하면 된다). 최적해가 오일러 방정식을 만족해도 역은 성립하지 않는다. 즉, 오일러 방정식은 최적해가 만족해야 하는 필요조건으로, 최적해의 후보를 구할 때 사용할 수 있다.

오일러 방정식을 만족하는 해가 최적해라는 것을 보여주기 위해서는, 구한 해에 대해 이계도함수의 값이 음이 아닌 실수라는 것을 보여주면 된다. 그래서 이전 오일러 방정식을 유도하는 과정에서 사용된 함수 g(a)에 대해, g’’(0)>=0이 성립하는 조건을 구하면 된다. g’’(a)= *=*가 성립해야 한다(부분적분 사용). 해당 부등식이 모든 y에 대해 성립해야 하기 때문에, 어떤 근사 이론을 적용하면 가 최적해 x\*에서 성립해야 한다는 것을 보일 수 있다. 이러한 부등식을 르장드르 필요조건이라고 한다.